Н.Я.А л и е в

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

В работе изучается случай отображения поверхности из E_4 на поверхность из $\bar{E}_4$, когда график отображения имеет только две независимые вторые квадратичные формы.

Рассмотрим евклидовы пространства E_4 и $\bar{E}_4$ как вполне ортогональные подпространства в собственно евклидовом пространстве E_8, имеющие одну общую точку O. Пусть V_2 и $\bar{V}_2$ гладкие поверхности в E_4 и $\bar{E}_4$ соответственно.

Будем изучать дифференцируемое взаимно однозначное отображение $T: V_2 \to \bar{V}_2$, которое переводит область $\Omega \subset V_2$ в некоторую область $\bar{\Omega} \subset \bar{V}_2$. Если точка x_1 описывает область Ω, то точка $x_2 = T(x_1)$ описывает область $\bar{\Omega} \subset \bar{V}_2$, а точка x с радиус-вектором $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$, где $\vec{x}_1 = \overrightarrow{Ox_1}$, $\vec{x}_2 = \overrightarrow{Ox_2}$, опишет область поверхности V_2^*, называемой графиком отображения T [1].

Пусть $R_1 = \{x_1, \vec{e}_i, \vec{e}_\alpha\}$, $R_2 = \{x_2, \vec{e}_{4+i}, \vec{e}_{4+\alpha}\}$ $(i,j = 1,2;\ \alpha,\beta = 3,4)$ соответствующие подвижные реперы в E_4 и $\bar{E}_4$ [1], причем $\vec{e}_i \in T_2(x_1)$, $(dT)_x(\vec{e}_i) = \vec{e}_{4+i} \in T_2(x_1)$ и $T_2(x_1)$, $T_2(x_2)$, $T_2(x)$ – касательные плоскости к поверхностям V_2, $\bar{V}_2$, V_2^* в соответствующих точках x_1, x_2, x, а $\vec{e}_\alpha$ и $\vec{e}_{4+\alpha}$ составляют ортонормированный базис ортогонального дополнения к $T_2(x_1)$ и $T_2(x_2)$ в пространствах E_4 и $\bar{E}_4$ соответственно.

Инфинитезимальные перемещения этих реперов удовлетворяют уравнениям:

$$d\vec{x}_1=\omega^i\vec{e}_i\,,\quad d\vec{e}_i=\omega_i^j\vec{e}_j+\omega_i^\alpha\vec{e}_\alpha\,,\quad d\vec{e}_\alpha=\omega_\alpha^i\vec{e}_i+\omega_\alpha^\beta\vec{e}_\beta, \tag{1}$$

$$d\vec{x}_2=\overline{\omega}^i\vec{e}_{4+i},\quad d\vec{e}_{4+i}=\overline{\omega}_i^j\vec{e}_{4+j}+\overline{\omega}_i^\alpha\vec{e}_{4+\alpha},\quad d\vec{e}_{4+\alpha}=\overline{\omega}_\alpha^i\vec{e}_{4+i}+\overline{\omega}_\alpha^\beta\vec{e}_{4+\beta} \tag{2}$$

В точке $x\in V_2^*$ возникает репер: $R=\{x,\vec{\varepsilon}_i,\vec{\varepsilon}_{2+i},\vec{\varepsilon}_{2+\alpha},\vec{\varepsilon}_{4+\alpha}\}$, где $\vec{\varepsilon}_i=\vec{e}_i+\vec{e}_{4+i}$; $\vec{\varepsilon}_{2+i}=\vec{e}_i-\gamma_{is}\overline{\gamma}^{sj}\vec{e}_{4+j}$; $\vec{\varepsilon}_{2+\alpha}=\vec{e}_\alpha$; $\vec{\varepsilon}_{4+\alpha}=\vec{e}_{4+\alpha}$; $\overline{\gamma}_{ij}=\vec{e}_{4+i}\vec{e}_{4+j}$; $\gamma_{ij}=\vec{e}_i\vec{e}_j$.

Имеем

$$d\vec{x}=\theta^i\vec{\varepsilon}_i,\quad d\vec{\varepsilon}_i=\theta_i^j\vec{\varepsilon}_j+\theta_i^{2+j}\vec{\varepsilon}_{2+j}+\theta_i^{2+\alpha}\vec{\varepsilon}_{2+\alpha}+\theta_i^{4+\alpha}\vec{\varepsilon}_{4+\alpha} \tag{3}$$

$$d\vec{\varepsilon}_\rho=\theta_\rho^i\vec{\varepsilon}_i+\theta_\rho^{2+i}\vec{\varepsilon}_{2+i}+\theta_\rho^{2+\alpha}\vec{\varepsilon}_{2+\alpha}+\theta_\rho^{4+\alpha}\vec{\varepsilon}_{4+\alpha}\qquad(\rho=\overline{3,8})$$

$$\theta_i^\rho=c_{ij}^\rho\,\omega^j \tag{4}$$

В этой статье мы будем рассматривать случай, когда поверхность V_2^* имеет две линейно независимые вторые квадратичные формы, следовательно $\operatorname{rang}\|c_{ij}^\rho\|=2$. Будем считать, что квадратичные формы Φ^3, Φ^4 линейно независимы. Тогда

$$\Phi^{2+\alpha}=\lambda_{2+j}^{2+\alpha}\Phi^{2+j}\;;\quad \Phi^{4+\alpha}=\lambda_{2+j}^{4+\alpha}\Phi^{2+j}. \tag{5}$$

Используя равенства (5), находим:

$$d^2\vec{x}=(d\theta^i+\theta^j\theta_j^i)\vec{\varepsilon}_i+\Phi^{2+j}\vec{c}_j\,.$$

Векторы $\vec{c}_1$, $\vec{c}_2$ образуют базис плоскости главной нормали $N_2^*(x)$ поверхности V_2^*. Проектируя $N_2^*(x)$ ортогонально на E_4 и $\overline{E}_4$, получим плоскость $\widetilde{N}_2(x_1)=[x_1,\vec{a}_1,\vec{a}_2]$, $\vec{a}_i=\vec{e}_i+\lambda_{2+i}^{2+\alpha}\vec{e}_\alpha$ и плоскость $\widetilde{N}_2(x_2)=[x_2,\vec{b}_1,\vec{b}_2]$, $\vec{b}_i=-\gamma_{is}\overline{\gamma}^{sj}\vec{e}_{4+j}+\lambda_{2+j}^{4+\alpha}\vec{e}_{4+\alpha}$. Плоскости $\widetilde{N}_3(x_1)=[x_1,\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{M}]$, $\widetilde{N}_3(x_1)=[x_1,\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{H}]$ и $\widetilde{N}_3(x_2)=[x_2,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\overline{\vec{M}}]$, $\widetilde{\widetilde{N}}_3(x_2)=[x_2,\vec{b}_1,\vec{b}_2,\overline{\vec{H}}]$ порождают в областях Ω и $\overline{\Omega}$ сети Σ_2 и $\overline{\Sigma}_2$ соответственно, где $\vec{M}$ и $\overline{\vec{M}}$ -векторы средней кривизны поверхностей V_2 и $\overline{V}_2$, а векторы $\vec{H}$ и $\overline{\vec{H}}$ ортогональны соответственно векторам $\vec{M}$ и $\overline{\vec{M}}$ в нормальных плоскостях этих поверхностей.

Направим вектор $\vec{e}_3$ коллинеарно вектору $\vec{M}$, а вектор $\vec{e}_4$ коллинеарно вектору $\overline{\vec{M}}$. Тогда направляющие векторы линий сетей Σ_2 и $\overline{\Sigma}_2$ имеют следующие представления:

$$\vec{m}_1=\lambda_4^6\vec{e}_1-\lambda_3^6\vec{e}_2\,,\quad \vec{m}_2=\lambda_4^5\vec{e}_1-\lambda_3^5\vec{e}_2\,,$$

$$\overline{\vec{m}}_1=[\lambda_4^8\gamma_{1s}\gamma^{s1}-\lambda_3^8\gamma_{2s}\gamma^{s1}]\vec{e}_5+[\lambda_4^8\gamma_{1s}\gamma^{s2}-\lambda_3^8\gamma_{2s}\gamma^{s2}]\vec{e}_6,$$

$$\overline{\vec{m}}_2=[\lambda_4^7\gamma_{1s}\gamma^{s1}-\lambda_3^7\gamma_{2s}\gamma^{s1}]\vec{e}_5+[\lambda_4^7\gamma_{1s}\gamma^{s2}-\lambda_3^7\gamma_{2s}\gamma^{s2}]\vec{e}_6.$$

Пусть Σ_2' и $\overline{\Sigma}_2'$ -сети на поверхностях V_2 и $\overline{V}_2$, взаимные к сетям Σ_2 и $\overline{\Sigma}_2$ соответственно [2].

Т е о р е м а 1. $\overline{\Sigma}_2'=T(\Sigma_2')$ тогда и только тогда, когда квадратичные асимптотические формы поверхностей V_2 и $\overline{V}_2$ удовлетворяют либо условию $\lambda_4^{2+\alpha}\Phi^{4+\alpha}=\lambda_4^{4+\alpha}\Phi^{2+\alpha}$, либо условию $\lambda_4^{2+\alpha}\Phi^{4+\beta}=\lambda_4^{4+\beta}\Phi^{2+\alpha}$.

Т е о р е м а 2. $\overline{\Sigma}_2=T(\Sigma_2)$ тогда и только тогда, когда выполняется либо условие

$$(\lambda_{2+j}^{2+\alpha}\gamma^{ji}\vec{e}_{4+i})(b_{22}^\alpha\vec{c}_{11}-b_{11}^\alpha\vec{c}_{22})=0,$$

либо условие $\quad(\lambda_{2+j}^{2+\alpha}\gamma^{ji}\vec{e}_{4+i})(b_{22}^\beta\vec{c}_{11}-b_{11}^\beta\vec{c}_{22})=0$,

где $\vec{c}_{ii}$ -вектор вынужденной кривизны линии, проходящей через точку x в направлении вектора $\vec{\varepsilon}_i$.

Т е о р е м а 3. Если $\overline{\Sigma}_2=T(\Sigma_2)$, то $\overline{\Sigma}_2'=T(\Sigma_2')$ тогда и только тогда, когда направляющие векторы $\overline{\vec{m}}_\alpha$ линий сети $\overline{\Sigma}_2'$ удовлетворяют условию

$$\overline{\vec{m}}_\alpha\cdot(a_{11}^\beta\vec{c}_{22}-a_{22}^\beta\vec{c}_{11})=0,\quad(\alpha\neq\beta)$$

или условию

$$\overline{\vec{m}}_\alpha\cdot(a_{11}^\alpha\vec{c}_{22}-a_{22}^\alpha\vec{c}_{11})=0.$$

Список литературы

I. Б а з ы л е в В.Т. К геометрии дифференцируемых отображений евклидовых пространств.-Уч.записки МГПИ им.В.И.Ленина, I970, № 374, т.I, с.4I-5I.

2. Б а з ы л е в В.Т. О многомерных сетях в евклидовом пространстве.-Лит.матем.сб., I966, 6, № 4, с.475-49I.

3. Д о б р о т в о р с к и й А.С. Отображение гиперповерхностей евклидовых пространств.-Уч.зап.Моск.обл. пед.ин-та, I972, с.46-59.